

3D videnie a geometria

Sonka, Hlavac, Boyle: Image Processing, Analysis and Machine vision,
kapitola: 3D vision, geometry

Marr

- Zlom vo výskume 3D videnia statickej scény
- Navrhol teóriu 3D videnia
- Svoj prístup považoval za zvláštny prípad všeobecného stoja na spracovanie informácií, ktorý chápal v 3 úrovniach

Marrova teória

- **1. Výpočtová teória:** opisuje čo zariadenie má robiť akú informáciu má poskytnúť zo vstupnej informácie. Tiež by mala opisovať logiku stratégie, ktorá vykonáva túto úlohu.
- **2. Reprezentácia a algoritmus:** opisuje ako má byť teória realizovaná, konkrétne reprezentácia informácie a algoritmus na manipuláciu s nimi
- **3. Implementácia:** opisuje konkrétne programy pre konkrétny hardvér

3 úrovne reprezentácie 3D scény

- Prvotný náčrt (primal sketch),
 - 2.5 rozmerný náčrt (2.5D sketch),
 - Plná 3D reprezentácia (full 3D representation).
- Postupne sa zvyšuje množstvo informácie o 3D tvare

Prvotný náčrt

- Najst' dôležité zmeny intenzity v obraze – hrany
- Zmeny intenzity sa určujú v rôznych škálovaniach – blurring filters - Gaussov filter
- Hrany sa určia pomocou zero-crossing – Laplasov operátor
- Zero-crossing sa zoskupia podľa polohy a orientácie aby sme získali informáciu o tokenoch (hrany, pruhy, bloby) ktoré poskytnú informáciu o orientácii plôch v scéne

2.5D náčrt

- Rekonštruuje relatívnu vzdialenosť od pozorovateľa k povrchom – hĺbková mapa
- Určujú sa normály plôch
- Hlavný prístup sa nazýva Tvar z X, kde X môže byť pohyb, jas, stereovidenie, textúra

3D reprezentácia

- Prechod k objektovo centrovanej súradnicovej sústave, nezávislosť na pozorovateľovi
- Reprezentácia pomocou volumetrických primitív na rozdiel od reprezentácie pomocou povrchov
- Marrova teória je dobrý teoretický rámec ale nevedie k dobrým výsledkom pri vision aplikáciách

Ďalšie paradigmy videnia: aktívne a účelové videnie

2 školy sa snažia vysvetliť mechanizmus videnia

1. Staršia

- sa snaží použiť explicitnú metriku na začiatku úlohy tj. na čiary, krivky, normály.
- Geometria sa získava spôsobom bottom-up
- Výstupom je geometrický model

2. Mladšia

- nezískava metriku z vizuálnych dát pokiaľ si to úloha nevyžiada
- Data sa zberajú systematicky
- Databáza obrazov je model.

Aktívne videnie

- Veľa tradičných CV systémov a teórií snímajú dáta kamerami s pevnými charakteristikami – aktívne a účelové videnie môžu byť vhodnejšie
- V aktívnom vision systéme sú vlastnosti snímania dát dynamicky kontrolované interpretáciou scény.
 - Veľa vizuálnych úloh je jednoduchších ak je pozorovateľ je aktívny a kontroluje vizuálne senzory (pohyb kamery)
 - Ak nemáme dost' dát interpretovať scénu, kamera sa môže pozerat' z iného bodu.
 - Aktívne videnie je inteligentné získavanie dát kontrolované meranými, čiastočne interpretovanými parametrami scény a ich chybami

<i>Task</i>	<i>Passive observer</i>	<i>Active observer</i>
Shape from shading	Ill-posed. Regularization helps but a unique solution is not guaranteed due to non-linearities.	Well-posed. Stable. Unique solution. Linear equations.
Shape from contour	Ill-posed. Regularization solution not formulated yet. Solution exists only for very special cases.	Well-posed. Unique solution for monocular or binocular observer.
Shape from texture	Ill-posed. Assumptions about texture needed.	Well-posed without assumptions.
Structure from motion	Well-posed but unstable.	Well-posed and stable. Quadratic constraints. simple solution.

Table 11.1: Active vision makes vision tasks well-posed.

Kvalitatívne videnie

- Hľadá kvalitatívny opis objektov alebo scén
- Motivácia je nereprezentovať geometriu, ktorá nie je potrebná pre kvalitatívne (negeometrické) úlohy alebo rozhodnutia
- Kvalitatívna informácia je viac invariantná voči rôznym nechceným transformáciám (trochu odlišný bod pohľadu) alebo šumu ako kvantitatívne.
- Kvalitatívnosť umožňuje interpretáciu pozorovanie udalosti na niekoľkých úrovniach komplexity

Účelové videnie

- Dôležité je identifikovať cieľ úlohy a zjednodušiť ju určením iba tej informácie, ktorá je potrebná
- Prístup môže byť heterogénny a kvalitatívna odpoveď je postačujúca
- Účelové videnie zatiaľ nemá solídny teoretický základ, ale štúdium biologického videnia je bohatý zdroj inšpirácie

Základy projektívnej geometrie

- V projektívnej geometrii pracujeme s dvojrozmerným obrazom trojrozmerného svetla.
- Údaje ktoré spracovávame sú získane pomocou kamery, ktorá používa perspektívnu projekciu (stredové premietanie).
- Pri takomto premietaní nie je jednoduché zistiť presnú polohu bodov, keďže viaceré body sa môžu premietnuť do toho istého bodu.

- Pozrime sa ktoré body to vlastne budú.
- Ak počiatok premietania je bod T a premietaný bod je bod X a premietame na rovinu R.
- Potom všetky body na polpriamke TX sa premietnu do toho istého bodu do roviny R.
- Formálny zápis:
- Majme $(n+1)$ -rozmerný priestor R^{n+1} , ktorý neobsahuje počiatok

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n+1}]^T &\equiv [x'_1, \dots, x'_{n+1}]^T \text{ iff} \\ \exists \alpha \neq 0 : [x_1, \dots, x_{n+1}]^T &= \alpha [x'_1, \dots, x'_{n+1}]^T \end{aligned} \quad (9.1)$$

- Paralelne čiary nezostanú paralelne v perspektívnom obraze, napr. koľajnice

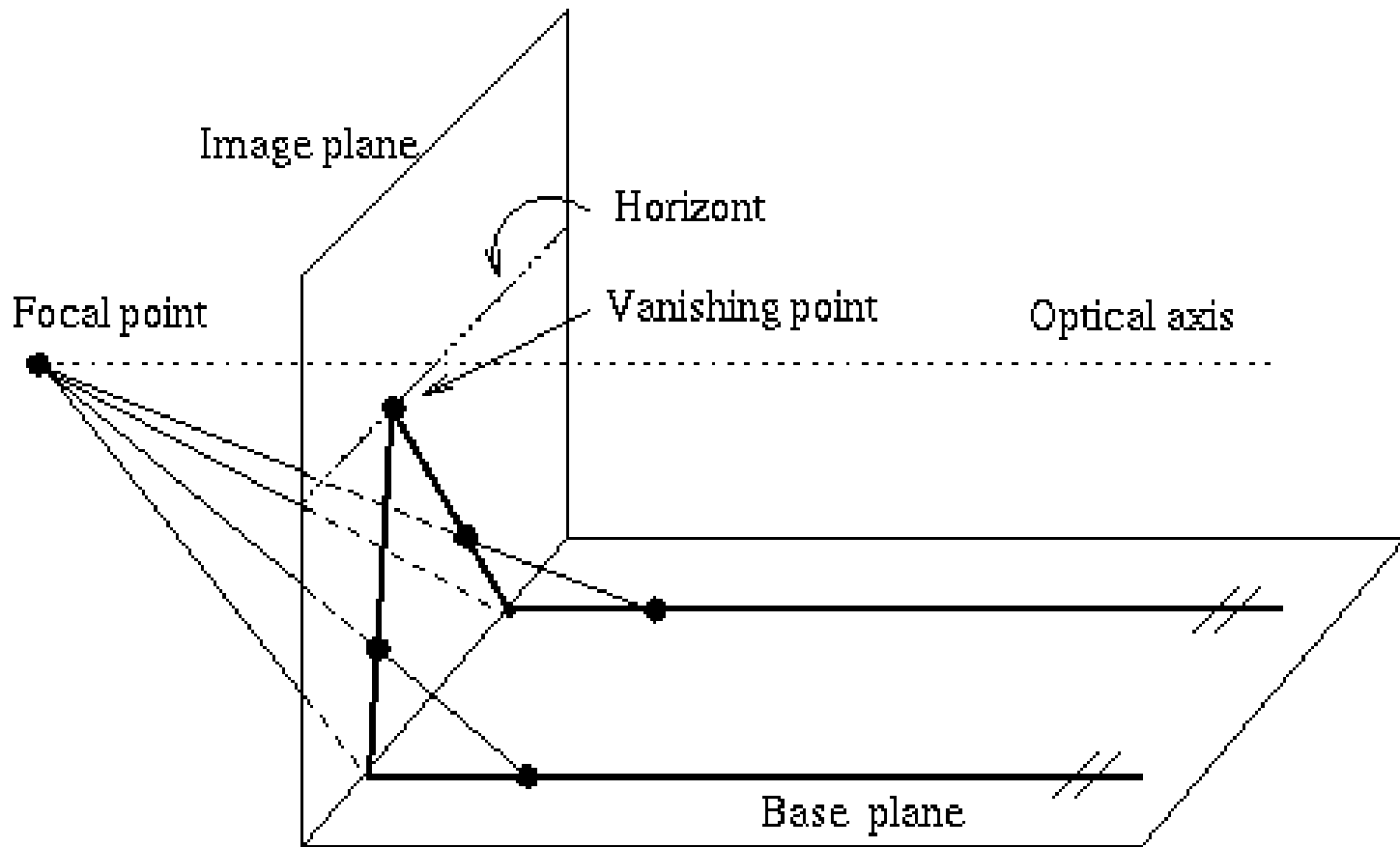


Figure 9.2 *Perspective projection of parallel lines.*

- Nech P je projektívny priestor
- Body v projektívnom priestore sú vyjadrené v homogénnych súradniciach
- One to one mapovanie je dané nasledovne

$$[x_1, \dots, x_n]^T \rightarrow [x_1, \dots, x_n, 1]^T \quad (9.2)$$

Geometria jednoduchej perspektívnej kamery

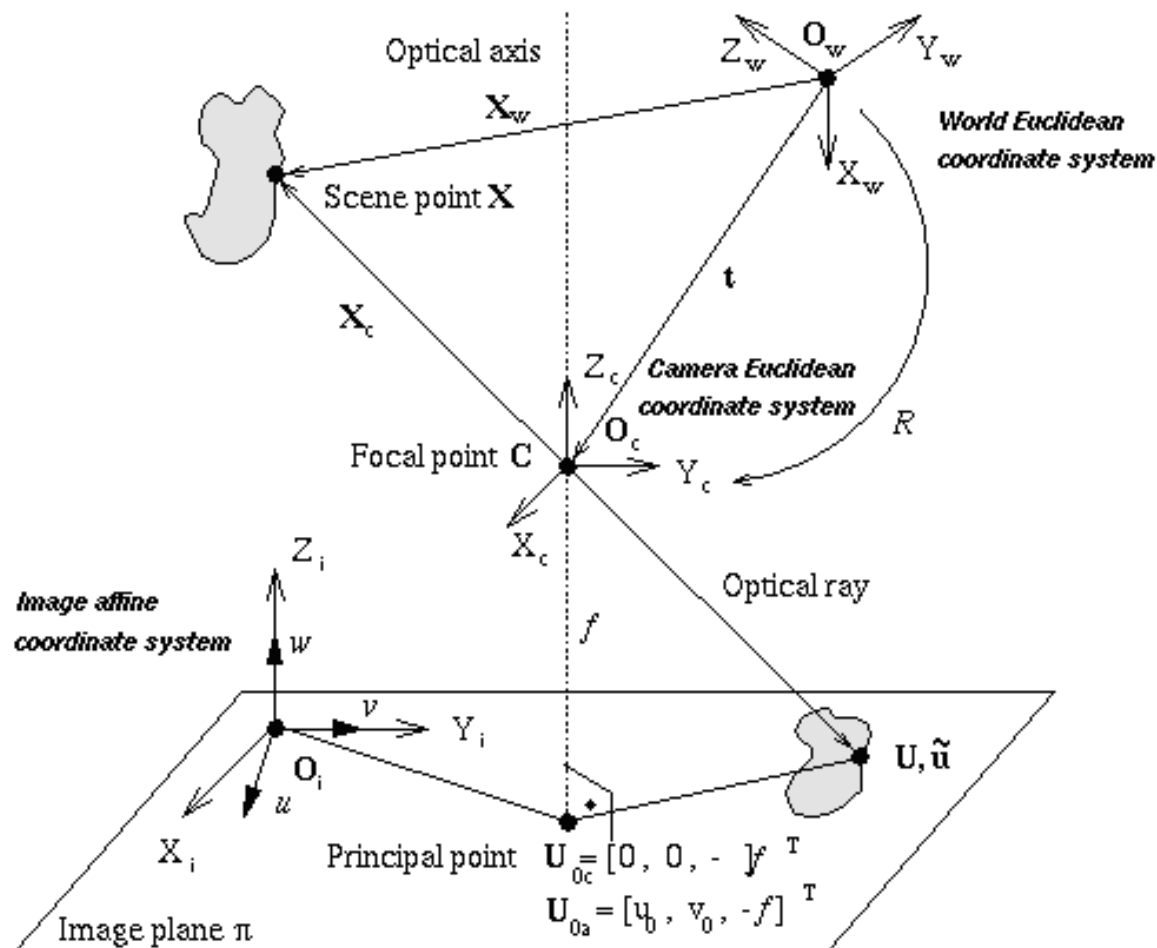


Figure 9.3 The geometry of a linear perspective camera.

Počas premietania pracuje so 4 súradnicovými systémami a tými sú:

- svetový euklidovský súradnicový systém
- súradnicový euklidovský systém kamery
- súradnicový euklidovský systém premietacej roviny
- súradnicový afínny systém premietacej roviny

Svetový Euklidovský súradnicový systém

- Sú v ňom popísané body ktoré ideme premietat'
- teda X aj bod U sú zapísane v jeho súradniciach.
- Má počiatok v bode O (nejaký bod priestoru).
- Index w .

Súradnicový euklidovský systém kamery:

- Má počiatok v bode $C = O_c$ – ohniskový bod
- jeho z-ová os je rovnobežná s optikou osou,
- x-ová a y-ová os sú na ňu kolmé (ortogonálna báza)
- Existuje vzťah medzi kamerovým a svetovým systémom, ktorý sa dá vyjadriť transformáciou zloženou z posunutia t a rotácie R .

Obrazový euklidovský súradnicový systém

- Má rovnaké súradnicové osi ako kamerový súradnicový systém, ale posunuté do bodu O_i
- X_i a Y_i ležia v rovine obrazu

Obrazový afinný súradnicový systém

- Má osi u , v , w a počiatok v počiatku euklidovskej súradnicovej sústavy obrazu,
 - v má smer ako Y_i a
 - w má smer ako Z_i
 - avšak u nemusí mať smer ako X_i .
- Zavádza sa preto, lebo pixle nemusia byť vo všeobecnosti kolmé a osi môžu byť škálované (ak by sme premietali, obraz by bol skosený a škálovaný)

Základný koncept

- Projektívna transformácia vo všeobecnom prípade môže byť rozdelená na 3 jednoduchšie transformácie, ktoré predstavujú prechody medzi jednotlivými súradnicovými systémami.
- Projektívna rovnica nám hovorí o tom ako sa body z trojrozmerného projektívneho priestoru premietajú do dvojrozmerného projektívneho priestoru.
- Majme bod X v priestore a chceme ho vyjadriť v súradnicovom systéme kamery, urobíme to nasledovne:

$$\mathbf{X}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = R (\mathbf{X}_w - \mathbf{t}) \quad (9.3)$$

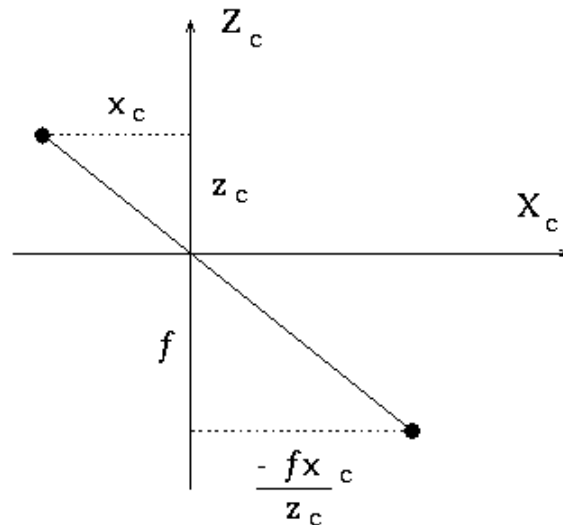


Figure 9.4 Calculation of the co-ordinates of the projected point.

X_c je už bod z novými súradnicami, R je rotácia a t je posunutie kamery voči svetových súradníc. Bod X_c je premietnutý na plochu Π ako bod U_c

$$U_c = \left[\frac{-fx_c}{z_c}, \frac{-fy_c}{z_c}, -f \right]^T \quad (9.4)$$

Parametre R a t sa nazývajú vonkajšie kalibračné parametre kamery

- Teraz si zoberme bod U_0 , ktorý sa označuje ako **stred** **premietacej roviny**, jeho súradnice označme v afínnom súradnicovom systéme $(u_0, v_0, 0)$.
- jeho súradnice vieme ľahko získať
- v súradnicovom systéme kamery budú $(0, 0, -f)$, potom vector posunutia z U_0 do počiatku afínnej súradnicovej sústavy je $(-u_0, -v_0, 0)$.
- Keďže používame homogénne súradnice tak priemet bodu $u = [U, V, W]^T$ do dvojrozmerného euklidovského priestoru bude: $u = [u, v]^T = [U/W, V/W]^T$.

- Afínne transformácie ktoré nám hovoria o prechode zo súradnicovej sústavy kamery do afínnej súradnicovej sústavy obrazu môžeme zapísať do matice, potom bude projektívna rovnica vyzerat' nasledovne:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -u_0 \\ 0 & c & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-fx_c}{z_c} \\ \frac{-fy_c}{z_c} \\ \frac{z_c}{1} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

- Parametre a , b , c nám hovoria o škálovaní a skosení pozdĺž súradnicových osí
- $-u_0$ a $-v_0$ nám hovoria o prechode od súradníc kamery k súradniciam premietania.
- Všetky tieto parametre sú kalibračné parametre a získavame ich pri kalibrácii kamery.

Aby sme odstránili parameter z_c tak ním vynásobíme rovnicu, dostaneme:

$$\begin{aligned}
 z_c \tilde{\mathbf{u}} &= z_c \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_c}{z_c} \\ \frac{y_c}{z_c} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R(\mathbf{X}_w - \mathbf{t}) = K R(\mathbf{X}_w - \mathbf{t}) \quad (9.6)
 \end{aligned}$$

Matica K bude kalibračná matica kamery.

V tejto rovnici máme dva druhy parametrov závislých na kamere a to vonkajšie parametre a vnútorné parametre, vonkajšie parametre sú pozícia kamery v svetových súradniciach sú to 3 rotácie R a 3 translácie t .

Uvažujme, že súradnicový systém kamery je totožný zo súradnicovým systémom sveta, potom dostávame:

$$z_c \tilde{\mathbf{u}} = z_c \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Potom pre u a v po rozpísaní dostávame rovnice:

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{W} = -fa \frac{x_c}{z_c} - fb \frac{y_c}{z_c} - u_0 = \alpha_u \frac{x_c}{z_c} + \alpha_{shear} \frac{y_c}{z_c} - u_0 \\ v &= \frac{V}{W} = -fc \frac{y_c}{z_c} - v_0 = \alpha_v \frac{y_c}{z_c} - v_0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Týmto dostávame vnútorné parametre kamery a sú nimi:

α_u : hovorí o škálovaní v smere u

α_{shear} : hovorí o skosení v smere v

α_v : hovorí o škálovaní v smere v

u_0

v_0

Teraz si zoberme rovnicu 9.6, pracujeme v homogénnych súradniciach tak súradnice bodu X_w budú $(x_w, y_w, z_w, 1)$, potom všetko vynásobíme a dostaneme rovnicu:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [KR | -K R t] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = M\tilde{\mathbf{X}}_w \quad (9.9)$$

Matica M sa nazýva **projekčná matica**.

Kalibrácia kamery

Pri kalibrácii kamery môžeme buď vychádzať zo známej scény alebo z neznámej scény.

Pri neznámej scéne ak poznáme parametre pohybu kamery tak táto operácia je jednoduchá, zredukuje sa nám na nájdenie obrazu bodov vo viacerých obrázkoch.

Ak nepoznáme parametre kamery tak je toto komplikovaná úloha a nevieme scénu jednoznačne zrekonštruovať z jedného obrázku, potrebujeme aspoň 3 pohľady na scénu.

Pri známej scéne vieme parametre kamery získať priamo zo scény a kamera sa môže sama nakalibrovat’.

Bod sa premieta na rovinu nasledovne:

$$\alpha_j \tilde{\mathbf{p}}_j = M \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Rozpíšme si projekčnú rovnicu nasledovne:

$$\begin{bmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + m_{14} \\ m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + m_{24} \\ m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} u(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34}) &= m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + m_{14} \\ v(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34}) &= m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + m_{24} \end{aligned} \quad (9.14)$$

máme 2 rovnice, každá s 12 neznámymi (x, y, z, m -ka, u, v),
to je 24 neznámých pre každý jeden bod.

Ak je k dispozícií n takých bodov dostaneme maticu tvaru
 $[2n \times 12]$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ux & -uy & -uz & -u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & -vx & -vy & -vz & -v \\ & & & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{34} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.15)$$

Matica M ma iba 11 neznámých parametrov

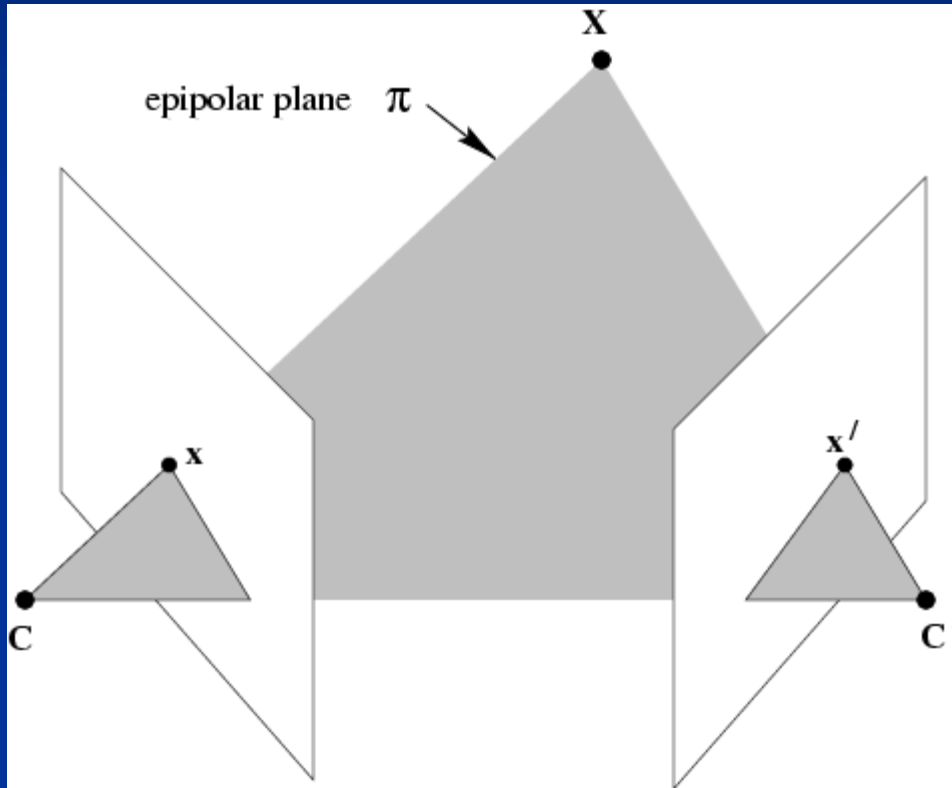
Na to aby sme teda vyriešili tento systém rovníc teda
potrebujeme aspoň 6 korešpondujúcich bodov.

Epipolar geometry

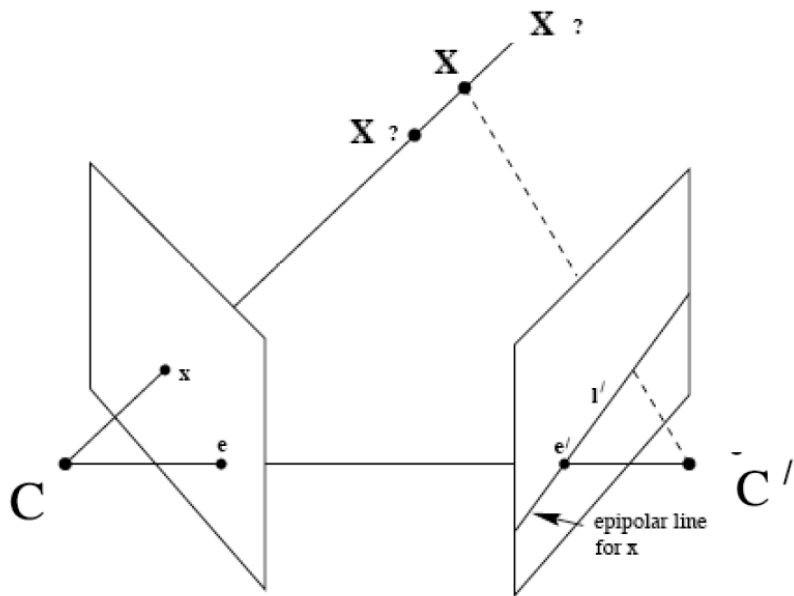
Three questions:

- (i) **Correspondence geometry:** Given an image point x in the first view, how does this constrain the position of the corresponding point x' in the second image?
- (ii) **Camera geometry (motion):** Given a set of corresponding image points $\{x_i \leftrightarrow x'_i\}$, $i=1, \dots, n$, what are the cameras P and P' for the two views? Or what is the geometric transformation between the views?
- (iii) **Scene geometry (structure):** Given corresponding image points $x_i \leftrightarrow x'_i$ and cameras P, P' , what is the position of the point X in space?

The epipolar geometry



C, C', x, x' and X are coplanar



Epipolar constraint

- Reduces correspondence problem to 1D search along an epipolar line

Kanonické stereo

- Kamery sa nachádzajú „vedľa seba“
- Priemetne ležia v jednej rovine
- Základňa je rovnobežná s horizontálnou súradnicovou osou súradnicových systémov kamier
- Rovnobežné optické osi
- Epipoly sa nepretínajú

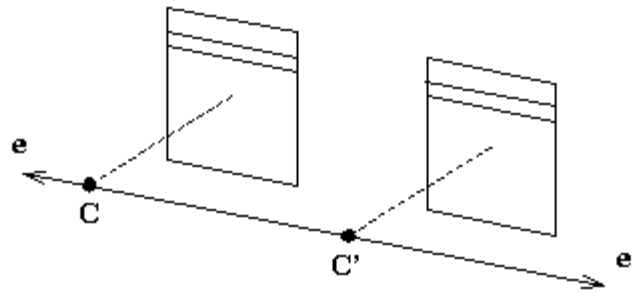


Figure 9.9 *The canonical stereo configuration where the epipolar lines are parallel in the image, and epipoles move to infinity.*

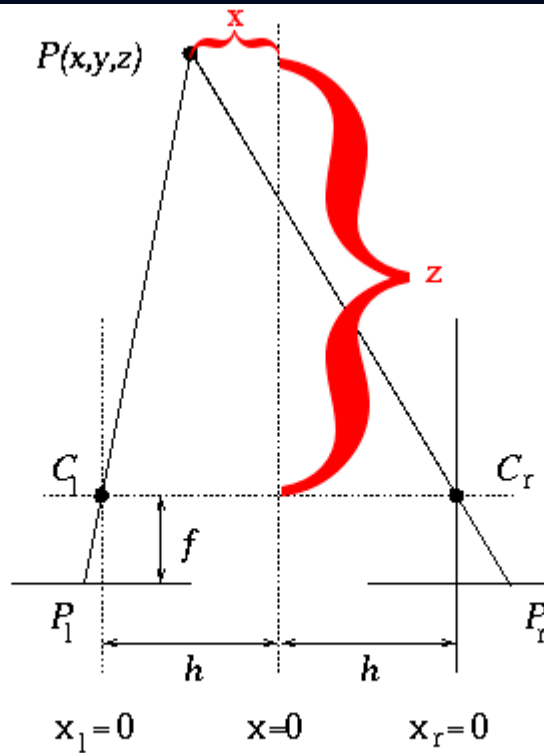


Figure 9.10 *Elementary stereo geometry in canonical configuration.*

Poznámé

$2h$ – vzdialenosť medzi kamerami, pozícia ohnisk

f – ohnisková vzdialenosť

P_l, P_r - priemety bodu P

Chceme zistiť

z -ovú súradnicu bodu P

Kanonické stereo

Kamery: $z=0$

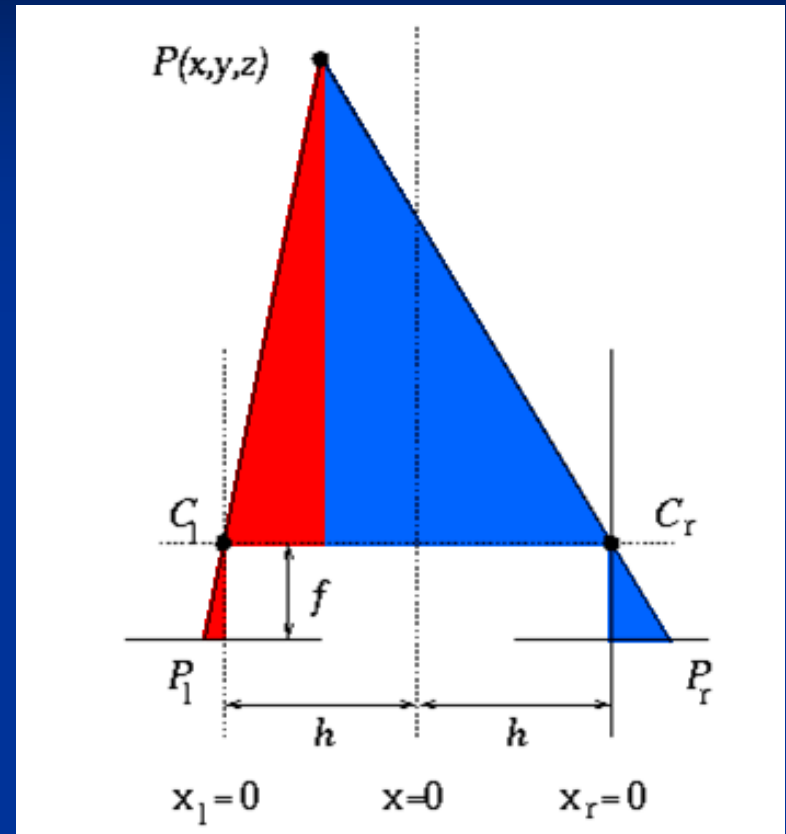
Využijeme podobnost' trojúhlníkov

$$\frac{P_l}{f} = -\frac{h+x}{z} \quad (9.24)$$

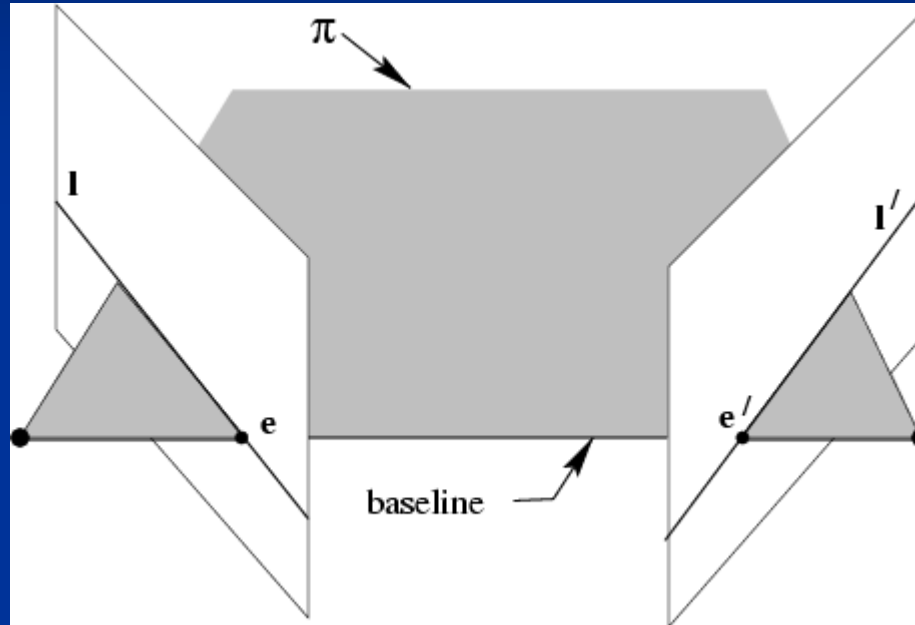
$$\frac{P_r}{f} = \frac{h-x}{z} \quad (9.25)$$

$$z(P_r - P_l) = 2hf \quad (9.26)$$

$$z = \frac{2hf}{P_r - P_l} \quad (9.27)$$

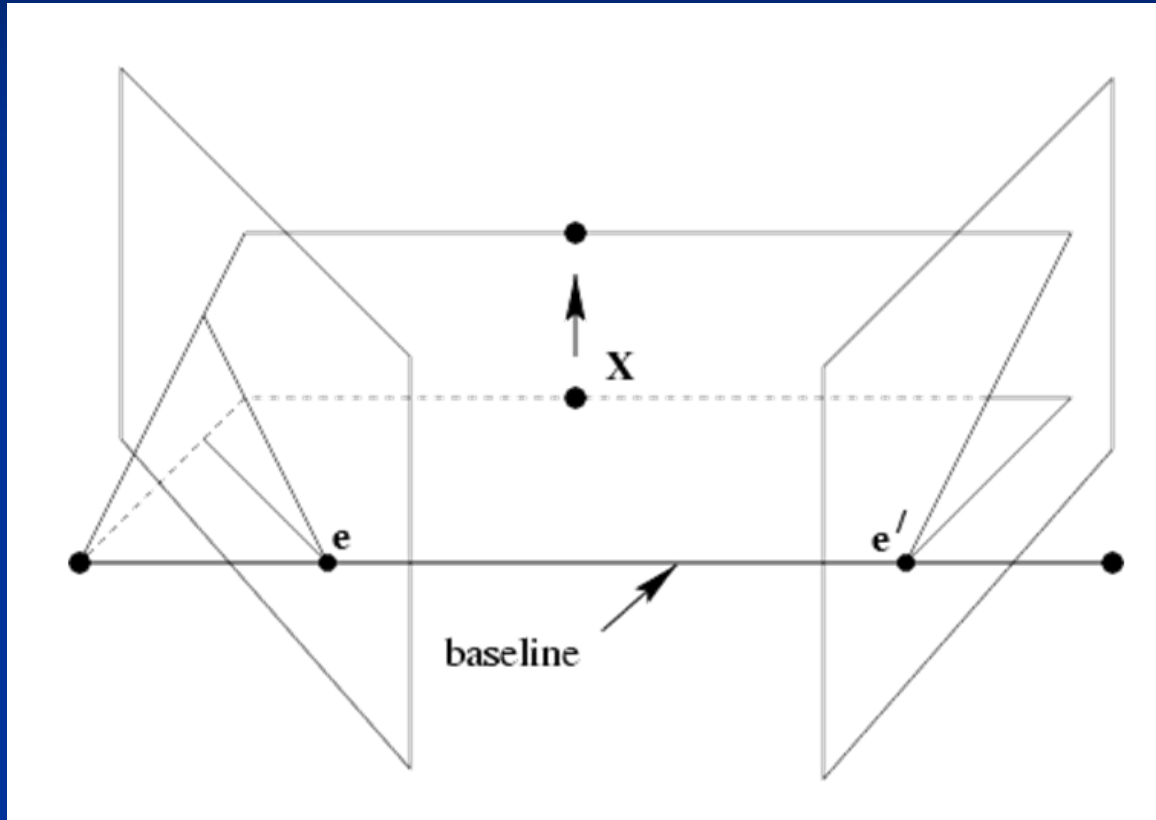


The epipolar geometry



The camera baseline intersects the image planes at the epipoles e and e' . Any plane π containing the baseline is an epipolar plane. All points on π project on l and l' .

The epipolar geometry



Family of planes π and lines l and l'
Intersection in e and e'

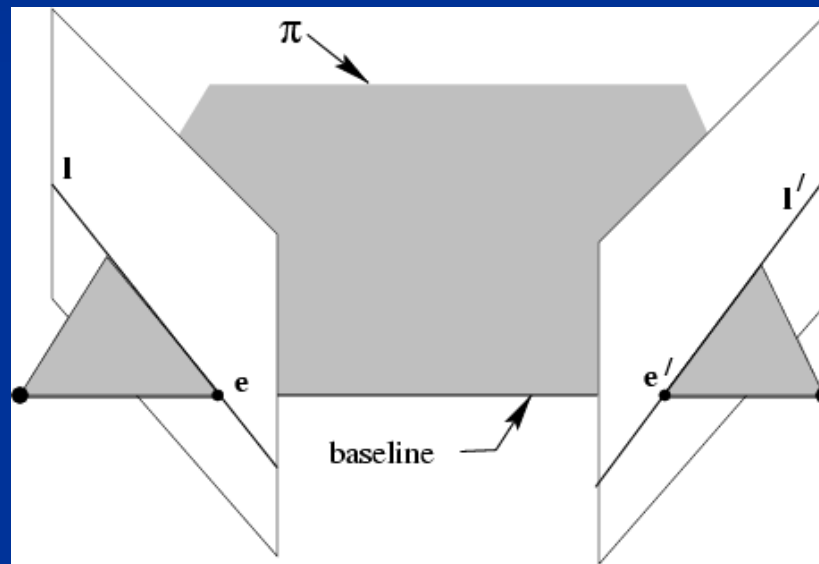
The epipolar geometry

epipoles e, e'

= intersection of baseline with image plane

= projection of projection center in other image

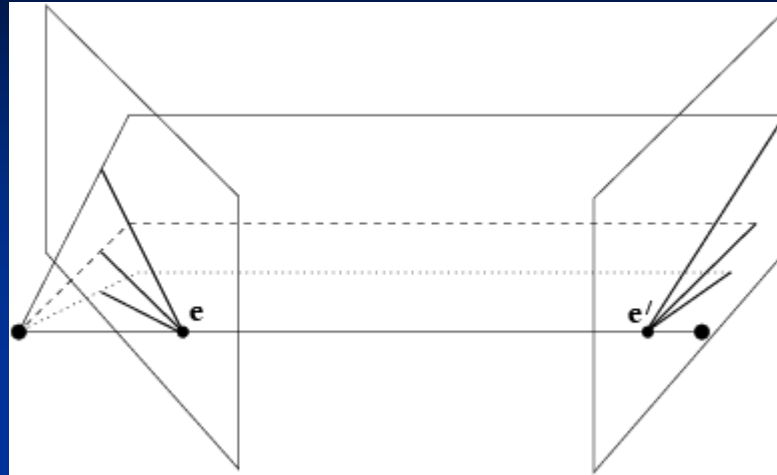
= vanishing point of camera motion direction



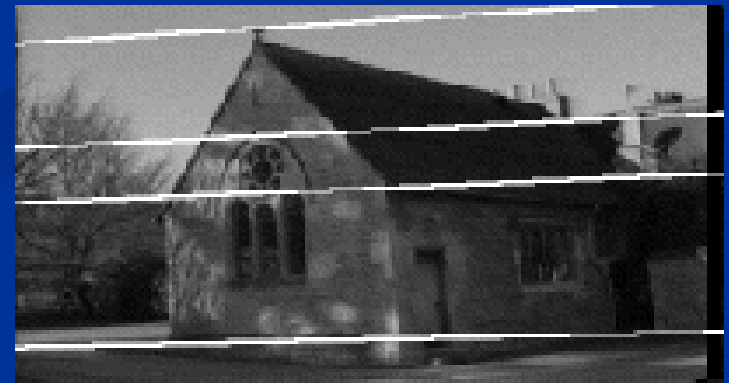
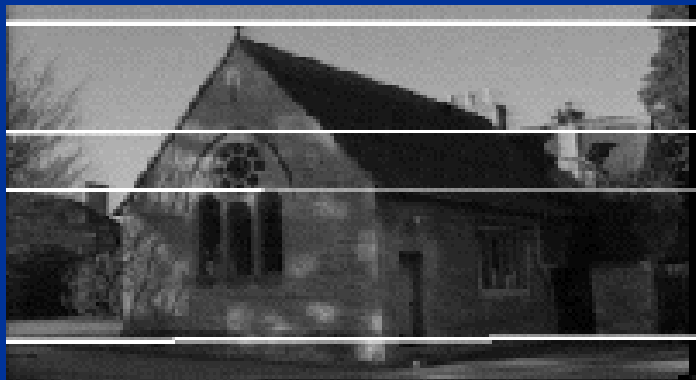
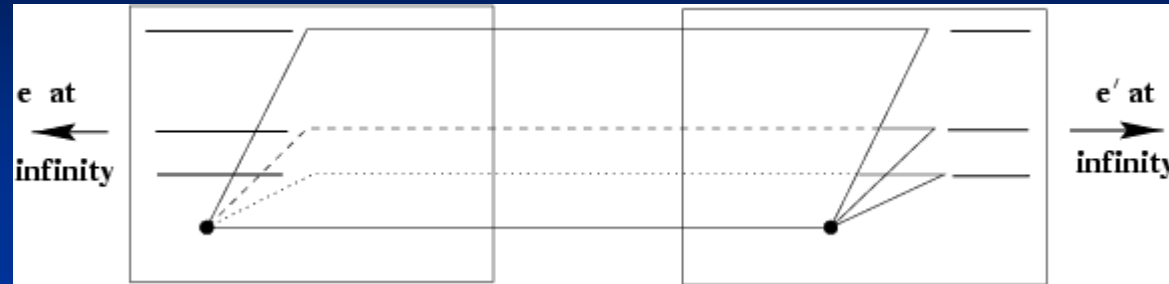
an epipolar plane = plane containing baseline (1-D family)

an epipolar line = intersection of epipolar plane with image
(always come in corresponding pairs)

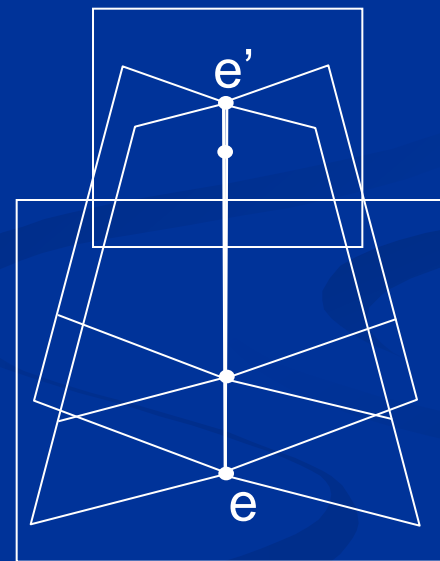
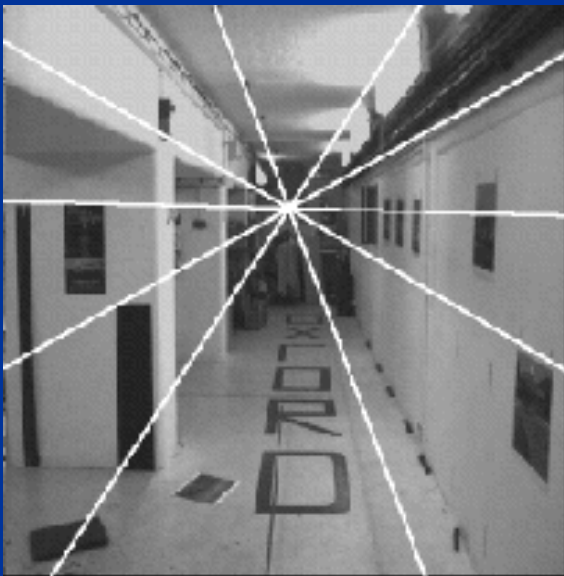
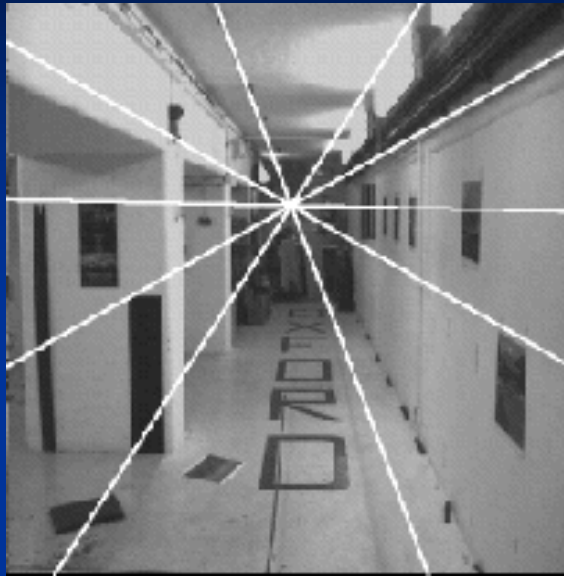
Example: converging cameras



Example: motion parallel with image plane



Example: forward motion



Matrix form of cross product

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} b = \mathbf{\hat{a}} \times \underline{\underline{b}}$$

$$a \cdot (a \times b) = 0$$

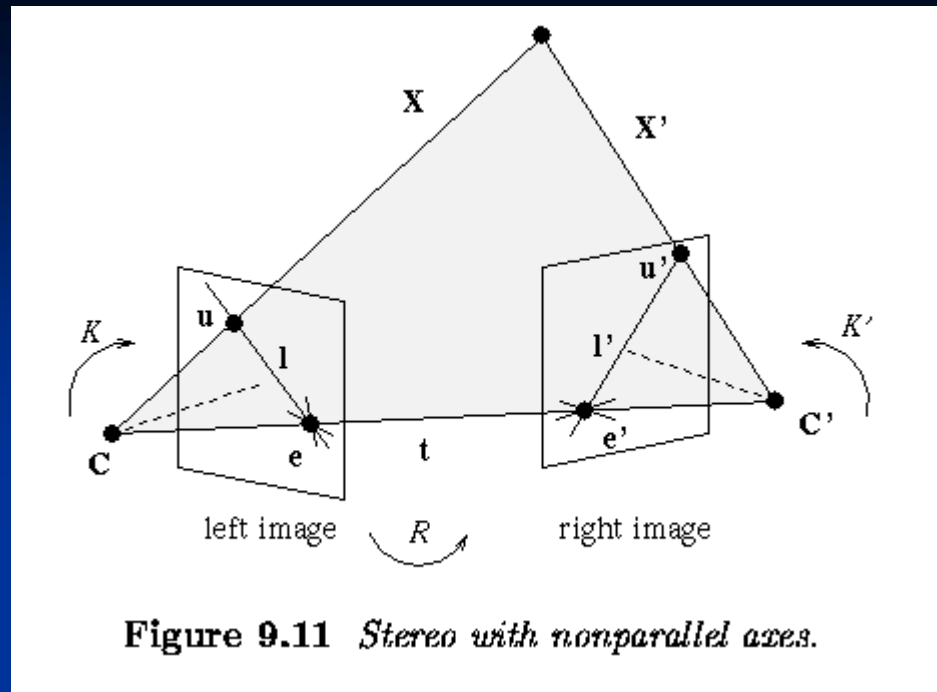
$$b \cdot (a \times b) = 0$$

Geometric transformation

$$P' = RP + t$$

$$p = MP \quad \text{with} \quad M = [I \mid 0]$$

$$p' = M'P' \quad \text{with} \quad M' = [R \mid t]$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &\simeq [K|\mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{bmatrix} = K \mathbf{X}, \\
 \mathbf{u}' &\simeq [K'R| -K'R\mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{bmatrix} = K'(R\mathbf{X} - R\mathbf{t}) = K'\mathbf{X}' \quad (9.28)
 \end{aligned}$$

Vieme, že vektory \mathbf{X} , \mathbf{X}' a \mathbf{t} sú koplanárne. Zapišeme to rovnicou

$$\mathbf{X}_L^T \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{X}'_L) = 0 \quad (9.29)$$

$$\mathbf{X}_L^T \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{X}'_L) = 0 \quad (9.29)$$

dosadíme za $\mathbf{X}_L = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}$ a za $\mathbf{X}'_L = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{K}^{-1})\mathbf{u}'$

a dostaneme rovnicu homogénnu o vzťahu k t , takže škála nie je určená.

$$(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}'^{-1}\mathbf{u}') = 0 \quad (9.30)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

$$\mathbf{t} \times \mathbf{A} = \mathbf{S}(\mathbf{t}) \mathbf{A} \quad (9.32)$$

$$(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u})^T (\mathbf{S}(\mathbf{t}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}'^{-1}\mathbf{u}') = 0$$

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{S}(\mathbf{t}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{u}' = 0 \quad (9.33)$$

$$\mathbf{u}^T (K^{-1})^T S(\mathbf{t}) R^{-1} K'^{-1} \mathbf{u}' = 0 \quad (9.33)$$

$$F \equiv (K^{-1})^T S(\mathbf{t}) R^{-1} K'^{-1} \quad (9.34)$$

$$\mathbf{u}^T F \mathbf{u}' = 0 \quad (9.35)$$

Computation of F

- Linear (8-point)
- Minimal (7-point)
- Robust (RANSAC)
- Non-linear refinement (MLE, ...)

Epipolar geometry: basic equation

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{F} \mathbf{x} = 0$$

$$x' x f_{11} + x' y f_{12} + x' f_{13} + y' x f_{21} + y' y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0$$

separate known from unknown

$$\begin{bmatrix} x' x, x' y, x', y' x, y' y, y', x, y, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33} \end{bmatrix}^T = 0$$

(data)

(unknowns)

(linear)

$$\begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = 0$$

the NOT normalized 8-point algorithm

$$\begin{bmatrix}
 x_1 x_1' & y_1 x_1' & x_1' & x_1 y_1' & y_1 y_1' & y_1' & x_1 & y_1 & 1 \\
 x_2 x_2' & y_2 x_2' & x_2' & x_2 y_2' & y_2 y_2' & y_2' & x_2 & y_2 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 x_n x_n' & y_n x_n' & x_n' & x_n y_n' & y_n y_n' & y_n' & x_n & y_n & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_{11} \\
 f_{12} \\
 f_{13} \\
 f_{21} \\
 f_{22} \\
 f_{23} \\
 f_{31} \\
 f_{32} \\
 f_{33}
 \end{bmatrix}
 = 0$$

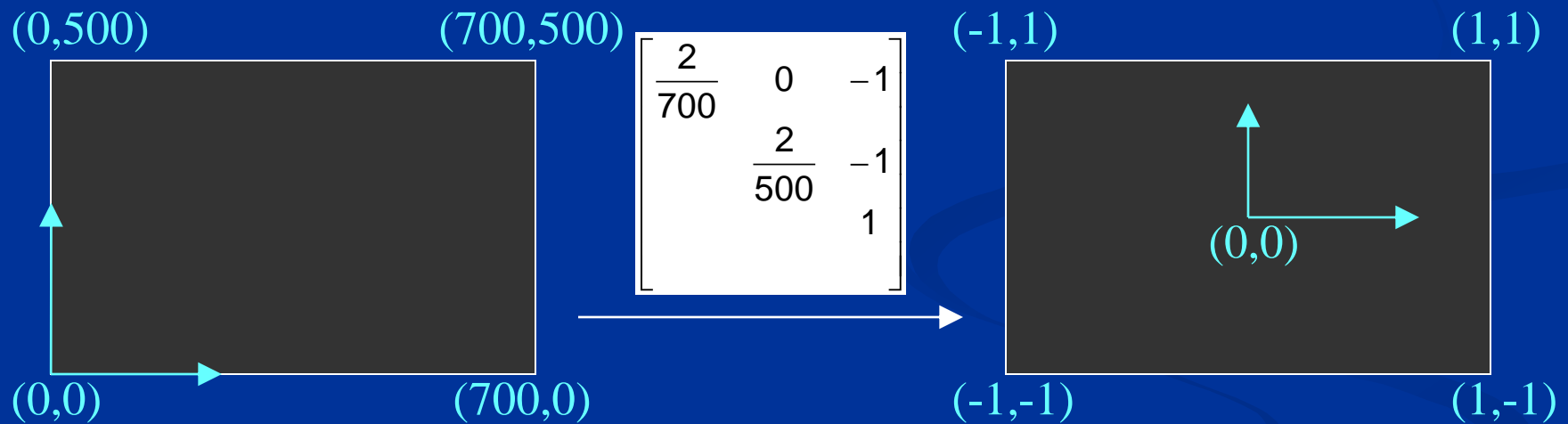
~ 10000 ~ 10000 ~ 100 ~ 10000 ~ 10000 ~ 100 ~ 100 ~ 100 1



Orders of magnitude difference
between column of data matrix
→ least-squares yields poor results

the normalized 8-point algorithm

Transform image to $\sim[-1,1] \times [-1,1]$



normalized least squares yields good results
(Hartley, PAMI 97)